Θεώρημα Lehmann-Scheffe Έστω $T = T(X_1, \dots, X_n)$ επαρκής και πλήρης.
Έστω $S = S(T)$ είναι αμερόλ. $g(\theta)$, $\theta \in \Theta$. Τότε S είναι ΑΟΕΔ της $g(\theta)$, μοναδικός.

Μεθοδολογία:

Βήμα 1: Εύρεση επαρκούς και πλήρους T. → με το παραγ. θεώρημα Neyman Fisher

Βήμα 2: Εύρεση συνάρτησης του T που είναι αμερόληπτη της $g(\theta)$.

Τότε, αυτή η συνάρτηση του T είναι ΑΟΕΔ.

Παράδειγμα 1 (κατανομή Bernoulli)

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από Bernoulli με παράμετρο θ, $0<\theta<1$ ($B(n=1,\theta)$) με σ.π. $f(x,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, $x = 0, 1$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ της θ και της θ^2.

Λύση:

Βήμα 1: (Εύρεση επαρκούς και πλήρους)

από κοινή κατανομή που είναι το γινόμενο των περιθωρίων.

$$f(\underline{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} = \underbrace{(1-\theta)^n \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum x_i}}_{= g(T(\underline{x}) = \sum x_i, \theta)} \cdot \underbrace{1}_{h(\underline{x})} =$$

Τότε, $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$ επαρκής.

Πληρότητα: (θέλω νδο το επαρκής που βρήκα είναι και πλήρης)

Αρκεί: Αν για μια συνάρτηση ϕ ισχύει ότι $E[\phi(T)] = 0$, $\forall \theta \in \Theta$, τότε

$\phi(t) = 0$ $\forall t$. δειγματικός χώρος

Έστω $E[\phi(T)] = 0$, $\forall \theta \in \underset{\sim}{(0,1)}$. Αποτελεί τον κατανομή του $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

$$\boxed{E[w(x)] = \begin{cases} \sum_x w(x) p_w(x), & x \text{ διακριτή} \\ \int w(x) f_x(x)\,dx, & x \text{ συνεχής} \end{cases}}$$

Με μέθοδο της ροπογεννήτριας (1º Μάθημα) το επαρκής $T = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim B(n,\theta)$. Άρα:

$E[\phi(T)] = 0$, $\forall \theta \Rightarrow \sum_{t=0}^{n} \phi(t) p_T(t) = 0$, $\forall \theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} \phi(t) \binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t} = 0, \ \forall \theta \Rightarrow \sum_{t=0}^{n} \phi(t) \binom{n}{t} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t (1-\theta)^n = 0, \ \forall \theta$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} \phi(t) \binom{n}{t} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t = 0, \ \forall \theta.$$ Αν θέσω $w = \frac{\theta}{1-\theta}$, τότε:

Τότε $E[\phi(T)]=0 \ \forall\vartheta \Rightarrow \underbrace{\sum_{t=0}^{n} \phi(t)\binom{n}{t} w^t}=0 \ \forall w$

το άθροισμα αυτό είναι ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού ως προς w

Η πολυωνυμική εξίσωση έχει άπειρες ρίζες, αφού ισχύει για κάθε w

Ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού έχει το πολύ n-ρίζες.

Άρα το πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού και επομένως $\phi(t)\binom{n}{t}=0, \ \forall t$

και επειδή $\binom{n}{t}\neq 0$ έχουμε ότι $\phi(t)=0 \ . \forall t$

Άρα το $T=\sum_{i=1}^{n} x_i$ είναι πλήρης.

Βήμα 2: Εύρεση αμερόληπτου εκτιμητή του ϑ που να είναι συνάρτηση του T.

Δοκιμάζω το ίδιο το T, γιατί $T\sim B(n,\vartheta)$ και επομένως $E(T)=n\vartheta$

$E(T)=n\vartheta \Rightarrow \frac{1}{n}E(T)=\vartheta \Rightarrow E\left(\frac{1}{n}T\right)=\vartheta \Rightarrow \frac{1}{n}T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$ είναι αμερόληπτος του ϑ.

Άρα, το $\bar{x}$ είναι επαρκές και πλήρες και αμερόληπτος του ϑ.

Άρα (από Lehmann-Scheffé) $\bar{x}$ ΑΟΕΔ του ϑ.

Για την ϑ^2

Βήμα 2: Εύρεση αμερόληπτου εκτιμητή του ϑ^2 που να είναι συνάρτηση του T.

Το $T\sim B(n,\vartheta)$ (παίρνω την διασπορά εδώ γιατί θέλω να έχω ϑ^2)

$Var(T)=n\vartheta(1-\vartheta) \Rightarrow E(T^2)-(ET)^2=n\vartheta-n\vartheta^2 \Rightarrow E(T^2)-n^2\vartheta^2=\underbrace{n\vartheta}_{=E(T)}-n\vartheta^2$

θέλω να δημιουργήσω όρους με ϑ^2 όχι ϑ $\Longrightarrow$ $E(T^2)-n^2\vartheta^2=E(T)-n\vartheta^2 \Rightarrow E(T^2)-E(T)=n^2\vartheta^2-n\vartheta^2$

$\Rightarrow E(T(T-1))=\vartheta^2 n(n-1) \Rightarrow E\left(\frac{T(T-1)}{n(n-1)}\right)=\vartheta^2$ παρατήρησα να βρω μια συνάρτηση του T

Επομένως η $\frac{T(T-1)}{n(n-1)}$ είναι συνάρτηση του επαρκούς και πλήρους T

και αμερ. του ϑ^2. Άρα $\frac{T(T-1)}{n(n-1)}$ ΑΟΕΔ του ϑ^2.

Παράδειγμα 2 (ομοιόμορφη κατανομή)

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από $U(0,\theta)$, $\theta > 0$ με σ.π.π. $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x < \theta$ και α.σ.κ. $F(x,\theta) = \frac{x}{\theta}$, $0 < x < \theta$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ της θ.

Λύση:

μη-αρνητικό διατεταγμένου δειγματικού

Βήμα 1: Το $T = X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ επαρκής (Το είχαμε δείξει στο προηγούμενο θέμα)

Πληρότητα: Εύρεση κατανομής της επαρκούς T. $\rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$

αθροιστική κατανομή της

Επομένως $f_T(t) = n\left[\frac{t}{\theta}\right]^{n-1} \frac{1}{\theta}$, $0 < t < \theta$. $\Rightarrow \boxed{f_T(t) = \frac{n t^{n-1}}{\theta^n}, \ 0 < t < \theta}$

Έστω $E[\phi(T)] = 0$, $\forall \theta$ $\xRightarrow[\text{συνεχή περίπτωση}]{\text{είμαστε στην}}$ $\int_0^\theta \phi(t) f_T(t)\, dt = 0$, $\forall \theta$ $\Rightarrow \int_0^\theta \phi(t) \frac{n t^{n-1}}{\theta^n}\, dt = 0$, $\forall \theta$

$\Rightarrow \int_0^\theta \phi(t)\, t^{n-1}\, dt = 0$, $\forall \theta$ $\xRightarrow[\text{άκρο το } \theta\text{. παραγωγίζουμε ως προς το πάνω άκρο του ολ/ματα.}]{\text{επειδή το πεδίο ορισμού μας έχει σαν πάνω}}$ $\frac{d}{d\theta} \int_0^\theta \phi(t)\, t^{n-1}\, dt = 0$, $\forall \theta$

$\xRightarrow{\text{ΑΠ II}} \phi(\theta)\,\theta^{n-1} = 0$, $\forall \theta \Rightarrow \phi(\theta) = 0$ $\forall \theta$ ή $\phi(t) = 0$ $\forall t$.

Άρα, το $T = X_{(n)}$ είναι πλήρης.

Βήμα 2. Ξεκινώ και δουλεύω το T.

$$E(T) = \int_0^\theta t f_T(t)\, dt = \int_0^\theta t \frac{n t^{n-1}}{\theta^n}\, dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n\, dt = \frac{n}{\theta^n} \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta.$$

$\Rightarrow \frac{n+1}{n} E(T) = \theta \Rightarrow E\left(\frac{n+1}{n} T\right) = \theta \Rightarrow \frac{n+1}{n} T = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ αμερόληπτος της θ.

Η $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους και αμερόληπτος της θ.

Άρα (από Lehmann-Scheffé) $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ ΑΟΕΔ της θ.

Παρατήρηση: Όσον αφορά την πληρότητα, ανάλογη είναι η διαδικασία αν η κατανομή του πληθυσμού ορίζεται σε διάστημα (ϑ, a), a γνωστό και εφαρμόζουμε $\int_\vartheta^a = -\int_a^\vartheta$

Παράδειγμα 3 (Εκθετική κατανομή)

Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $Exp(1/\vartheta)$, $\vartheta > 0$ με σ.π.π. $f(x,\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} e^{-x/\vartheta}$, $x > 0$.

Να κατασκευαστεί επαρκής ΑΟΕΔ της ϑ^2.

Λύση

Βήμα 1: $f(\underline{x},\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\vartheta} e^{-x_i/\vartheta} = \underbrace{\frac{1}{\vartheta^n} e^{-\sum x_i/\vartheta}}_{= g(T(\underline{x}) = \sum x_i, \vartheta)} \cdot \underbrace{1}_{h(\underline{x})} \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ επαρκής.

Για την πληρότητα απαιτείται η κατανομή της $T = \sum X_i$

Με την μέθοδο της ροπογεννήτριας (1ο μάθημα) το $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n, \vartheta)$

Έστω $E[\phi(T)] = 0, \forall \vartheta \Rightarrow \int_0^\infty \phi(t) f_T(t)\, dt = 0$, $\forall \vartheta \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^\infty \phi(t) \frac{1}{\vartheta^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t/\vartheta}\, dt = 0$, $\forall \vartheta \Rightarrow \int_0^\infty \phi(t) t^{n-1} e^{-t/\vartheta}\, dt = 0$, $\forall \vartheta$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(\phi(t) t^{n-1}) = 0$ (Μετασχηματισμός Laplace)

$\Rightarrow \phi(t) t^{n-1} = 0$, $\forall t \Rightarrow \phi(t) = 0$, $\forall t$.

Το $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι και πλήρης.

Βήμα 2 $Var(T)=n\theta^2 \Rightarrow E(T^2)-(ET)^2=n\theta^2 \Rightarrow E(T^2)-(n\theta)^2=n\theta^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(T^2)=n^2\theta^2+n\theta^2=n(n+1)\theta^2$

$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)}E(T^2)=\theta^2 \Rightarrow E\left(\frac{T^2}{n(n+1)}\right)=\theta^2.$

Άρα (από Lehmann-Scheffé) $\frac{T^2}{n(n+1)}$ ΑΟΕΔ της θ^2.

Συνέπεια - Συνεπής Εκτιμητής

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta$.

Έστω $T_n(X_1,\dots,X_n)$ ένας εκτιμητής της $g(\theta)$. Ο $T_n=T_n(X_1,\dots,X_n)$ θα λέγεται συνεπής εκτιμητής της $g(\theta)$, αν: $P(|T_n(X_1,\dots,X_n)-g(\theta)|>\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $\varepsilon>0$
(για πολύ μεγάλα δείγματα)

ΠΡΟΤΑΣΗ. Ο εκτιμητής $T_n=T_n(X_1,\dots,X_n)$ είναι συνεπής για την $g(\theta)$ αν:

(α) $E(T_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g(\theta)$ (δηλ. είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος)

(β) $Var(T_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Απόδειξη Ανισότητα Markov $P(|W|>\varepsilon)\le\frac{E(W^2)}{\varepsilon^2}$, $\varepsilon>0$

$$P(|T_n(X_1,\dots,X_n)-g(\theta)|>\varepsilon)\le\frac{E[T_n-g(\theta)]^2}{\varepsilon^2}=\frac{Var(T_n-g(\theta))+(E(T_n-g(\theta)))^2}{\varepsilon^2}=$$

$$=\frac{Var(T_n)+(E(T_n)-g(\theta))^2}{\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Rightarrow T_n \text{ συνεπής.}$$

Παράδειγμα Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $N(\mu,\sigma^2)$. Να δειχθεί ότι S^2 συνεπής της σ^2.

Λύση $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2_{n-1}$ υπενθύμιση $E(X^2_v)=v$, $Var(X^2_v)=2v$

$$E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = n-1 \Rightarrow \frac{(n-1)}{\sigma^2}E(S^2) = n-1 \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2 \Rightarrow (\alpha) \text{ ισχύει.}$$

$$Var\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1) \Rightarrow \frac{(n-1)^2}{(\sigma^2)^2}Var(S^2) = 2(n-1) \Rightarrow Var(S^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow (\beta)$ ισχύει.

Άρα S^2 συνεπής για σ^2.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από $U(0,\theta)$, $\theta>0$. Να δειχθεί ότι $X_{(n)}$ είναι συνεπής της θ.

Λύση:

(Πρέπει πρώτα να βρω την κατανομή της $X_{(n)}$)

Κατανομή της $X_{(n)}$: $f_{X_{(n)}}(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}$, $0<x<\theta$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

$$E(X_{(n)}) = \int_0^\theta x f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n}x^n\,dx = \frac{n}{\theta^n}\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^\theta \Rightarrow E(X_{(n)}) = \frac{n\theta}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$$

$$\boxed{\frac{\theta}{(n+1)/n} = \frac{\theta}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta.}$$

$$E(X_{(n)}^2) = \int_0^\theta x^2\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right|_0^\theta = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$Var(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - (E(X_{(n)}))^2 = \frac{(2n+3)n^2}{(n+1)^2(n+2)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Επομένως $X_{(n)}$ συνεπής για θ.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Επάρκεια - Πληρότητα στην Εκθετική Οικογένεια Κατανομών

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό στην Εκθετική Οικογένεια Κατανομών με σ.π.π.:

$$f(x,\vartheta) = c(\vartheta)h(x)e^{Q(\vartheta)T(x)}, \quad x \in A \subseteq \mathbb{R}$$

Το $\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$ είναι επαρκές και πλήρες.

Εφαρμογή Poisson

Έστω $X_1, \dots, X_n$ από $P(\vartheta)$, $p(x,\vartheta) = \frac{e^{-\vartheta}\vartheta^x}{x!}$

$$\left.\begin{aligned} p(x,\vartheta) &= \underbrace{e^{-\vartheta}}_{c(\vartheta)} \underbrace{(x!)^{-1}}_{h(x)} \vartheta^x \\ \vartheta^x &= e^{x\log\vartheta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p(x,\vartheta) = \underbrace{e^{-\vartheta}}_{c(\vartheta)} \underbrace{(x!)^{-1}}_{h(x)} e^{\overbrace{(\log\vartheta)}^{Q(\vartheta)} \underbrace{x}_{T(x)}}$$

Άρα $\sum_{i=1}^{n} T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ πλήρες.